

ОЦЕНКИ ДЛИН ПРОВЕРЯЮЩИХ И ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ ДЛЯ КОНТАКТОВ

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматриваются задачи проверки исправности и диагностики состояний N контактов путем составления из них двухполюсных контактных схем и наблюдения выдаваемых этими схемами значений на любых входных наборах значений переменных. Допускаются произвольные константные неисправности контактов; при этом предполагается, что не более k контактов неисправны (k – заданное натуральное число, не превосходящее N). Требуется минимизировать число схем, необходимых для проверки исправности и определения состояний всех контактов.

Материалы и методы. Используется метод «забивания» контактных схем такими неисправностями контактов, при которых каждая из схем реализует булеву константу.

Результаты. Получены нижние оценки $k/\sqrt{N}$ и $k/(N - k)$ для числа указанных схем. В случаях $k = N - 1$ и $k = N$ найдены точные значения этого числа.

Выводы. Для проверки исправности и диагностики состояний контактов невозможно обойтись схемами, число которых меньше некоторых фиксированных чисел, зависящих от N и k .

Ключевые слова: контакт, неисправность, контактная схема, проверяющий тест, диагностический тест.

К. А. Popkov

ESTIMATION OF FAULT DETECTION AND DIAGNOSTIC TESTS' LENGTH FOR CONTACTS

Abstract.

Background. The article considers problems of operability checking and identification of condition of the N contacts by means of experiments based on arrangement of two-pole circuits, made from these contacts, with subsequent "testing" of these circuits, i. e. finding Boolean functions realized by the circuits constructed. Random constant faults of contacts are permitted; at the same time, it is assumed that not more than k contacts are faulty, where k is a given natural number that does not rank over N . It is necessary to minimize a number of contact circuits required for operability checking and identification of condition of all contacts.

Materials and methods. The author used the method of "locking" of contact circuits with such faults of the contacts, under which each of the circuits realizes a Boolean constant.

Results. The lower bounds $k/\sqrt{N}$ and $k/(N-k)$ were obtained for the number of circuits mentioned. In the cases $k=N-1$ and $k=N$ the exact values of this number were found.

Conclusions. For operability checking and identification of condition of contacts it is impossible to manage with circuits, the number of which is less than some fixed numbers depending on N and k .

Key words: contact, fault, contact circuit, fault detection test, diagnostic test.

Введение

В работе рассматриваются задачи проверки исправности и распознавания состояний контактов с использованием экспериментов, заключающихся в составлении из заданных контактов произвольных двухполюсных контактных схем с последующим «прозваниванием» этих схем, т.е. нахождением булевых функций, реализуемых составляемыми схемами.

Описания физических принципов работы релейно-контактных схем и тех явлений, которые наблюдаются при работе таких схем, можно найти, например, в монографиях [1, 2]. Суть общепринятой математической модели контактной схемы и тех элементов (т.е. контактов), из которых строятся эти схемы, с исчерпывающей полнотой и ясностью представлена в [3]; именно такая математическая модель является объектом исследования и рассматривается ниже.

Опишем постановку задачи, как это сделано в [4]. Представим, что имеются N контактов ($N \geq 1$), занумерованных числами от 1 до N , из которых N_1 контактов с номерами от 1 до N_1 являются замыкающими, а N_2 контактов с номерами от $N_1 + 1$ до N – размыкающими, где $N_2 = N - N_1$ (N_1 или N_2 может быть равно 0). В исправном состоянии каждый замыкающий контакт, рассматриваемый как простейшая контактная схема, реализует между своими концами (полюсами схемы) булеву функцию x_i , а размыкающий контакт – булеву функцию $\overline{x_i}$, где x_i – отвечающая данному контакту переменная из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Число замыкающих контактов (N_1) и соответственно число размыкающих контактов (N_2) предполагаются известными. В неисправном состоянии каждый контакт реализует между своими концами одну из булевых констант, т.е. 0 (при обрыве контакта) или 1 (при замыкании контакта). Замыкание, или, как еще иногда говорят, короткое замыкание, здесь рассматривается как разновидность неисправности контакта (а не как функционирование исправного контакта, т.е. изменение его проводимости с нулевой на единичную). Предполагается, что среди данных N контактов не более k контактов могут быть неисправны, где k – заданное натуральное число, $k \leq N$. Можно составлять любые двухполюсные контактные схемы из данных контактов и наблюдать выдаваемые схемами значения на любых наборах значений переменных. При этом предполагается, что в каждой из построенных схем разным контактам могут отвечать одни и те же переменные из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, а в разных схемах одному и тому же контакту могут отвечать разные переменные из этого же множества (таким образом, вовсе не обязательно, чтобы в каждой схеме контакту с номером n отвечала переменная x_n). Например, в одной и той же схеме двум или более контактам может отвечать переменная x_1 , а одному и тому же контакту в одной схеме может отвечать переменная x_1 , в другой – x_2 и т.д. Отметим, что каждая из составляемых схем может содержать не более N контактов.

Задача заключается в том, чтобы протестировать контакты, т.е. для каждого из них определить, исправен данный контакт или неисправен (задача

проверки), и, в дополнение к этому, определить тип неисправности каждого неисправного контакта (задача диагностики), используя при тестировании по возможности меньшее число схем.

Предполагается, что в процессе экспериментирования исправные контакты остаются исправными, неисправные контакты – неисправными и тип неисправности каждого неисправного контакта сохраняется.

Основные определения и вспомогательные утверждения

Будем называть *неисправностью системы контактов* любое множество неисправностей контактов при условии, что число этих неисправностей не больше k (в частности, случай, когда все контакты исправны, является одним из видов неисправности системы контактов).

Неисправность любого контакта можно представить в виде упорядоченной пары (n, δ) , где n – номер этого контакта, δ – булева константа, которую он реализует (между своими концами). Соответственно любую неисправность системы контактов можно представить в виде множества $\{(n_1, \delta_1), \dots, (n_s, \delta_s)\}$, где s – число неисправных контактов; $n_1, \dots, n_s$ – номера неисправных контактов; δ_j – булева константа, которую реализует между своими концами контакт n_j .

Диагностическим тестом назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных контактов, что для любых двух различных неисправностей системы контактов наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают (т.е. существует схема S_j такая, что реализуемая этой схемой функция при первой неисправности не совпадает с реализуемой этой же схемой функцией при второй неисправности). Число l назовем *длиной* этого теста.

Проверяющим тестом назовем такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных контактов, что для любых двух неисправностей системы контактов, при которых множества неисправных контактов различны, наборы функций, реализуемых схемами, не совпадают. Число l назовем *длиной* этого теста.

Содержательный смысл данных определений состоит в следующем: диагностический (проверяющий) тест – это такой набор двухполюсных контактных схем $S_1, \dots, S_l$, составленных из заданных N контактов, что по набору функций, реализуемых этими схемами, можно однозначно определить состояние (соответственно, исправность или неисправность) каждого из N контактов. При этом проверяющий тест не обязан определять тип неисправности (обрыв или замыкание) каждого неисправного контакта.

Введем функции $L_c(N_1, N_2, k)$ и $L_d(N_1, N_2, k)$, равные длинам самого короткого (соответственно проверяющего и диагностического) теста для N замыкающих контактов, среди которых не более k неисправных. Пусть $L_c(N, k) = L_c(N, 0, k)$ и $L_d(N, k) = L_d(N, 0, k)$.

Введенные к настоящему моменту определения полностью согласуются с соответствующими определениями из [4] при замене $L_d(N_1, N_2, k)$ на $L(N_1, N_2, k)$.

Ранее (утверждение 2 [4]) доказано, что

$$L_d(N_1, N_2, k) = L_d(N_1 + N_2, 0, k) = L_d(N, 0, k) = L_d(N, k).$$

Аналогично можно доказать равенства

$$L_c(N_1, N_2, k) = L_c(N_1 + N_2, 0, k) = L_c(N, 0, k) = L_c(N, k),$$

из которых следует, что для нахождения $L_c(N_1, N_2, k)$ и $L_d(N_1, N_2, k)$ достаточно знать только $L_c(N, k)$ и $L_d(N, k)$. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что все заданные контакты замыкающие.

Отметим, что для любых N и k выполняется соотношение

$$L_d(N, k) \geq L_c(N, k), \quad (1)$$

поскольку любой диагностический тест, очевидно, является проверяющим. Кроме того, ясно, что всегда $L_c(N, k) \geq 1$ (пустой набор схем не может быть проверяющим тестом).

В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста (длины N), очевидно, можно взять множество из N контактных схем, каждая из которых представляет собой один из заданных контактов. Отсюда и из (1) для любых N и k имеем

$$L_c(N, k) \leq L_d(N, k) \leq N. \quad (2)$$

Формулировки и доказательства основных результатов

В работе [4] показано, что при выполнении условий $N \geq 36$ и $2k \lceil \sqrt{k} \rceil \leq N$ справедливо неравенство $L_d(N, k) \leq k + 1$. В силу (2) такая же верхняя оценка справедлива и для $L_c(N, k)$. В данной работе устанавливаются некоторые нижние оценки для величин $L_c(N, k)$ и $L_d(N, k)$ при различных N и k .

Введем для удобства множество M , состоящее из всех N контактов.

Пусть N и k зафиксированы. Введем следующую последовательность

чисел: $r_1 = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, $r_{i+1} = \left\lfloor \sqrt{N - \sum_{j=1}^i r_j} \right\rfloor$ для $i \geq 1$, если $\sum_{j=1}^i r_j < N$.

Теорема 1. Если t – такое натуральное число, что все числа $r_1, \dots, r_t$ определены и $\sum_{i=1}^t r_i \leq k - 1$, то $L_c(N, k) \geq t + 1$ и $L_d(N, k) \geq t + 1$.

Следствие. Для любых N и k справедливы неравенства $L_c(N, k) \geq \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}$ и $L_d(N, k) \geq \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}$.

Сначала докажем следствие из теоремы 1. В силу соотношения (1) достаточно доказать только первое неравенство. Если $\frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \leq 1$, то следствие очевидно, так как любой проверяющий тест должен содержать хотя бы одну

схему. Пусть $\frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} > 1$, тогда $\frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \geq 1$ в силу того, что на интервале

$\left(\frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}; \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \right)$ не могут содержаться целые числа и, в частности, единица.

Возьмем в условии теоремы 1 в качестве t число $\left\lfloor \frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \right\rfloor$, тогда $t \geq 1$. Из

определения чисел r_i имеем, что $r_i \leq \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ для любого $i \geq 1$, если только r_i определено. Для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^i r_j \leq i \lfloor \sqrt{N} \rfloor \leq t \lfloor \sqrt{N} \rfloor \leq \frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \lfloor \sqrt{N} \rfloor = k-1 < N, \quad (3)$$

а тогда по индукции число r_{i+1} определено и, кроме того, из (3) при $i = t$

следует, что $\sum_{i=1}^t r_i \leq k-1$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 и

$$L_c(N, k) \geq t+1 = \left\lfloor \frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \right\rfloor + 1 > \frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}, \text{ но тогда } L_c(N, k) \geq \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \text{ опять же}$$

в силу того, что на интервале $\left(\frac{k-1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}; \frac{k}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \right)$ не могут содержаться целые числа.

Следствие доказано.

Для доказательства теоремы 1, учитывая соотношение (1), достаточно показать, что верно неравенство $L_c(N, k) \geq t+1$. Вначале докажем два вспомогательных утверждения. Пусть S – произвольная двухполюсная контактная схема с полюсами A и B , содержащая не более чем n контактов, где $0 \leq n \leq N$. Для каждого контакта K в схеме S введем функцию $d(K)$, равную длине самой короткой цепи, содержащей данный контакт, одним из концов которой является полюс A , если такая цепь существует (под длиной цепи понимается число содержащихся в ней контактов). В противном случае полагаем, что значение $d(K)$ не определено. Очевидно, что $d(K) = 1$ для всех контактов, инцидентных A . Через $A - K_{(1)} - \dots - K_{(m)} - A'$ будем обозначать цепь в схеме S с концами A и A' , содержащую последовательно контакты $K_{(1)}, \dots, K_{(m)}$ при движении от полюса A к вершине A' .

Лемма 1. Пусть $A - K_{(1)} - \dots - K_{(m)} - A'$ – цепь в схеме S и $m \geq 2$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ значения $d(K_{(i)}), d(K_{(i+1)})$ определены и $d(K_{(i+1)}) \leq d(K_{(i)}) + 1$.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Контакты $K_{(i)}$ и $K_{(i+1)}$ содержатся в цепи $A - K_{(1)} - \dots - K_{(m)} - A'$, одним из концов которой является A , откуда следует, что значения $d(K_{(i)})$, $d(K_{(i+1)})$ определены. Далее, если к самой короткой цепи, содержащей контакт $K_{(i)}$, одним из концов которой является A , добавить контакт $K_{(i+1)}$, то получится цепь длины не более $d(K_{(i)}) + 1$, содержащая контакт $K_{(i+1)}$, одним из концов которой является A , так как контакты $K_{(i)}$ и $K_{(i+1)}$ имеют в схеме S хотя бы одну общую вершину. Отсюда $d(K_{(i+1)}) \leq d(K_{(i)}) + 1$.

Лемма доказана.

Множество контактов схемы S назовем *сечением*, если оно имеет хотя бы один общий контакт с любой несамопересекающейся цепью, соединяющей полюса A и B схемы S .

Лемма 2. В схеме S существует либо цепь между полюсами, содержащая не более $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ контактов, либо сечение, содержащее не более $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ контактов.

Доказательство. Пусть $r = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Предположим, что утверждение леммы не выполнено, т.е. любая цепь между полюсами схемы S и любое сечение данной схемы содержат не менее $(r+1)$ контактов. В схеме S должна существовать хотя бы одна цепь между полюсами, так как иначе пустое множество было бы ее сечением, что неверно в силу неравенства $0 < r+1$. Пусть M_i , $i = 1, \dots, r+1$, – множества, состоящие из всех контактов K_j , для каждого из которых $d(K_j) = i$. Очевидно, что множества M_i попарно не пересекаются и состоят только из контактов, принадлежащих схеме S . Докажем, что каждое из них является сечением схемы S . Пусть $A - K_{(1)} - \dots - K_{(m)} - B$ – произвольная цепь между ее полюсами. Тогда $d(K_{(1)}) = 1$. Из принадлежности контакта $K_{(m)}$ данной цепи следует, что значение $d(K_{(m)})$ определено и $d(K_{(m)}) \leq m$. С другой стороны, контакт $K_{(m)}$ не может содержаться в схеме S в цепи длины менее $r+1$, одним из концов которой является полюс A , так как в противном случае в S существовала бы цепь между полюсами A и B длины менее $r+1$, что невозможно по предположению. Таким образом, $d(K_{(m)}) \geq r+1$ и, как следствие, $m \geq r+1 \geq 2$. Из соотношений $d(K_{(1)}) = 1$, $d(K_{(m)}) \geq r+1$ и $d(K_{(i+1)}) \leq d(K_{(i)}) + 1$ для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ (последнее верно в силу леммы 1) следует, что среди чисел $d(K_{(1)})$, $d(K_{(2)})$, ..., $d(K_{(m)})$ встречаются все целые числа от 1 до $(r+1)$. Это означает, что каждому множеству M_i , $i = 1, \dots, r+1$, принадлежит хотя бы один контакт из числа $K_{(1)}, K_{(2)}, \dots, K_{(m)}$, откуда следует, что каждое из этих множеств является сечением схемы S .

Поскольку любое сечение схемы S по предположению содержит не менее $(r+1)$ контактов, для любого $i \in \{1, \dots, r+1\}$ верно неравенство $|M_i| \geq r+1$. В силу того, что множества M_i попарно не пересекаются, выполняется соотношение

$$\left| \bigcup_{i=1}^{r+1} M_i \right| = \sum_{i=1}^{r+1} |M_i| \geq (r+1)^2 = \left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \right)^2 > (\sqrt{n})^2 = n.$$

Получаем, что множество $\bigcup_{i=1}^{r+1} M_i$, состоящее только из контактов, принадлежащих схеме S , имеет мощность не менее $(n+1)$. Однако в схеме S содержится не более n контактов. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Теперь докажем теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т.е. $l = L_c(N, k) \leq t$ и существует набор контактных схем $S_1^1, \dots, S_l^1$, являющийся проверяющим тестом. Опишем по индукции некоторую процедуру, содержащую l шагов. Считаем перед началом процедуры, что построены схемы $S_1^1, \dots, S_l^1$. Предположим, что уже построены схемы $S_i^i, \dots, S_l^i$, где $i \in \{1, \dots, l\}$, и множества контактов M_j для любого натурального j такого, что $j \leq i-1$, причем множества M_j попарно не пересекаются при различных j , $|M_j| = r_j$ и ни в одной из схем $S_i^i, \dots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству M_j . При $i=1$ все эти условия, очевидно, выполнены. Так как $|M_j| = r_j$ для $1 \leq j \leq i-1$, то схема S_i^i состоит не более чем из $N - \sum_{j=1}^{i-1} r_j$ контактов, поэтому по лемме 2 при

$$n = N - \sum_{j=1}^{i-1} r_j \text{ возможны два случая.}$$

1. В схеме S_i^i существует цепь между полюсами, содержащая не более

$$\left\lfloor \sqrt{N - \sum_{j=1}^{i-1} r_j} \right\rfloor = r_i \text{ контактов. Пусть это контакты } K_1^i, \dots, K_{m_i}^i, \quad m_i \leq r_i. \text{ Если}$$

$m_i < r_i$, то пусть $K_{m_i+1}^i, \dots, K_{r_i}^i$ – произвольные $r_i - m_i$ контактов, отличные от контактов $K_1^i, \dots, K_{m_i}^i$ и принадлежащие множеству $M \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} M_j$ (такие кон-

такты существуют, так как $\sum_{j=1}^i r_j \leq \sum_{j=1}^t r_j \leq k-1 < N$, поэтому

$|M \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} M_j| = N - \sum_{j=1}^{i-1} r_j > r_i$). Пусть $M_i = \{K_1^i, \dots, K_{r_i}^i\}$. Так как ни в одной из

схем $S_1^i, \dots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству M_j , где $1 \leq j \leq i-1$, то множество M_i не пересекается ни с одним из множеств M_j при $1 \leq j \leq i-1$. Предположим, что все контакты из множества M_i неисправны и при этом замкнуты. Тогда в схеме S_i^i существует цепь между полюсами, обладающая тождественно единичной проводимостью, а в этом случае схема S_i^i , вне зависимости от состояний остальных

$N - \sum_{j=1}^i r_j$ контактов, реализует тождественную единицу.

2. В схеме S_i^i существует сечение, содержащее не более

$\left\lfloor \sqrt{N - \sum_{j=1}^{i-1} r_j} \right\rfloor = r_i$ контактов. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1 с той разницей, что все контакты из множества M_i предполагаются оборванными. Тогда в схеме S_i^i существует сечение, состоящее целиком из оборванных контактов, а в этом случае согласно определению сечения в S_i^i не может быть ни одной проводящей цепи между полюсами, т.е. вне зависимости от состояний остальных $N - \sum_{j=1}^i r_j$ контактов данная схема реализует

тождественный нуль.

Получаем, что в каждом из двух случаев при соответствующих неисправностях контактов из множества M_i схема S_i^i реализует некоторую булеву константу δ_i . Если $i = l$, то процедуру остановим. Если же $i < l$, то при данных неисправностях контактов каждая из схем S_j^i , $j = i+1, \dots, l$, может содержать некоторые контакты из множества M_i , которые либо замкнуты, либо оборваны. В обоих случаях удалим все неисправные контакты из M_i из схемы S_j^i , а в случае, если неисправные контакты были замкнуты, изменим топологию схемы S_j^i , стянув две вершины (концы) каждого замкнутого контакта в одну (эта операция хорошо известна в теории контактных схем). При этом схема S_j^i перейдет в некоторую двухполюсную контактную схему S_j^{i+1} , функционирующую в точности как схема S_j^i как в случае, когда все контакты из множества $M \setminus \bigcup_{j=1}^i M_j$ исправны, так и в случае неисправности неко-

торых контактов из этого множества. На этом считаем i -й шаг процедуры завершенным и заменяем i на $(i+1)$.

В результате l шагов указанной процедуры строятся: набор схем S_j^i , $i=1, \dots, l$, $j=i, \dots, l$, попарно непересекающиеся множества $M_1, \dots, M_l$ такие, что $|M_j| = r_j$, и булевы константы $\delta_1, \dots, \delta_l$ такие, что при соответствующих

неисправностях контактов из множества $\bigcup_{j=1}^l M_j$ каждая из схем S_j^i ,

$i=1, \dots, l$, $j=i, \dots, l$, функционирует в точности как схема S_j^1 , а каждая из

схем S_i^i , $i=1, \dots, l$, реализует булеву константу δ_i . Отсюда следует, что и каждая из схем S_i^1 , $i=1, \dots, l$, реализует при рассматриваемых неисправностях контактов булеву константу δ_i . Общее число неисправных контактов

равно $|\bigcup_{j=1}^l M_j| = \sum_{j=1}^l |M_j| = \sum_{j=1}^l r_j \leq \sum_{j=1}^t r_j \leq k-1$ по условию теоремы, в то время

как общее число контактов равно $N \geq k$. Значит, существует некоторый кон-

такт K , принадлежащий множеству $M \setminus \left(\bigcup_{j=1}^l M_j \right)$. Однако по набору функ-

ций, реализуемых схемами $S_1^1, \dots, S_l^1$, невозможно определить, исправен контакт K или, скажем, оборван, так как в обоих этих случаях данный набор функций равен $(\delta_1, \dots, \delta_l)$. Осталось заметить, что оба этих случая представляют собой допустимые неисправности системы контактов, поскольку общее число неисправных контактов не превосходит

$$|\bigcup_{j=1}^l M_j| + 1 \leq k-1+1 = k.$$

Получено противоречие, так как $(S_1^1, \dots, S_l^1)$ – проверяющий тест.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $k < N$ и $r = \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor$, тогда

$$L_c(N, k) \geq r + L_c(N - r(N-k), k - r(N-k))$$

и

$$L_d(N, k) \geq r + L_d(N - r(N-k), k - r(N-k)).$$

Следствие 1. Если $k < N$, то $L_c(N, k) \geq \frac{k}{N-k}$ и $L_d(N, k) \geq \frac{k}{N-k}$.

Следствие 2. При $N \geq 2$ справедливы равенства $L_c(N, N-1) = L_d(N, N-1) = L_c(N, N) = L_d(N, N) = N$.

Сначала покажем, как следствия 1 и 2 выводятся из теоремы 2.

Доказательство следствия 1. В силу соотношения (1) достаточно доказать только первое неравенство. Пусть $r = \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor$, тогда

$$N - r(N - k) \geq k - r(N - k) = k - \left\lfloor \frac{k-1}{N-k} \right\rfloor (N - k) \geq k - \frac{k-1}{N-k} (N - k) = 1$$

и по теореме 2

$$L_c(N, k) \geq r + L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) \geq r + 1 > \frac{k-1}{N-k},$$

а в таком случае $L_c(N, k) \geq \frac{k}{N-k}$ в силу того, что на интервале $\left(\frac{k-1}{N-k}, \frac{k}{N-k} \right)$ не может содержаться целых чисел.

Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. В силу соотношения (2) имеем $L_c(N, N-1) \leq N$, $L_d(N, N-1) \leq N$, $L_c(N, N) \leq N$ и $L_d(N, N) \leq N$. Очевидно, что $L_c(N, N-1) \leq L_c(N, N)$, а тогда $L_d(N, N) \geq L_c(N, N) \geq L_c(N, N-1)$ и $L_d(N, N-1) \geq L_c(N, N-1)$ в силу (1). Поэтому достаточно доказать неравенство $L_c(N, N-1) \geq N$. В условиях теоремы 2 при $k = N-1$ имеем $r = N-2$, а тогда по этой теореме $L_c(N, N-1) \geq N-2 + L_c(2, 1)$. Покажем, что $L_c(2, 1) \geq 2$. Предположим противное, т.е. что $L_c(2, 1) = 1$ и существует схема S , составляющая проверяющий тест длины 1 для двух контактов, среди которых не более одного может быть неисправно. Каждый из двух контактов обязан содержаться в этой схеме в некоторой несамопересекающейся цепи, соединяющей ее полюса. Действительно, в противном случае при, скажем, обрыве соответствующего контакта схема бы реализовывала ту же функцию, что и в случае, когда оба контакта исправны. Но тогда схема S , очевидно, представляет собой либо последовательное, либо параллельное соединение двух контактов, а в каждом из этих случаев нетрудно убедиться, что она не может являться проверяющим тестом. Полученное противоречие доказывает следствие 2.

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала неравенство $L_c(N, k) \geq r + L_c(N - r(N - k), k - r(N - k))$. Предположим, что оно не выполнено, т.е. $l = L_c(N, k) \leq r + L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) - 1$ и существует набор контактных схем $S_1^1, \dots, S_l^1$, являющийся проверяющим тестом. Будем считать, что

$$l = r + L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) - 1 \quad (4)$$

(в противном случае можно дополнить тест произвольными схемами так, чтобы полученный набор схем имел длину $r + L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) - 1$; очевидно, что он также будет проверяющим тестом). Тогда

$$k - r(N - k) \geq k - \frac{k-1}{N-k}(N-k) = 1,$$

$$N - r(N - k) > k - r(N - k) \geq 1, L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) \geq 1 \text{ и } l \geq r.$$

Опишем по индукции некоторую процедуру, содержащую q шагов, где

$$0 \leq q \leq r. \quad (5)$$

Считаем перед началом процедуры, что построены схемы $S_1^1, \dots, S_l^1$. Предположим, что уже построены схемы $S_i^i, \dots, S_l^i$, где $i \in \{1, \dots, r\}$, и множества контактов M_j для любого натурального j такого, что $j \leq i-1$, причем множества M_j попарно не пересекаются при различных j и ни в одной из схем $S_i^i, \dots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству M_j . При $i=1$ все эти условия, очевидно, выполнены. Далее, если ни в одной из схем $S_i^i, \dots, S_l^i$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N-k$, или если $i=r+1$, то положим $q=i-1$ и процедуру остановим. В противном случае сделаем i -й шаг процедуры следующим образом. Среди схем $S_i^i, \dots, S_l^i$ выберем схему $S_{j_i}^i$, содержащую цепь между полюсами минимально возможной длины m_i (если таких схем несколько, выберем ту из них, у которой индекс j_i наименьший). Без ограничения общности, $j_i = i$ (от перенумерации схем проверяющий тест, очевидно, остается проверяющим тестом). Пусть M_i – множество контактов указанной цепи, тогда

$$|M_i| = m_i \leq N - k. \quad (6)$$

Так как ни в одной из схем $S_i^i, \dots, S_l^i$ не содержится ни одного контакта, принадлежащего какому-либо множеству M_j , где $1 \leq j \leq i-1$, то множество M_i не пересекается ни с одним из множеств M_j при $1 \leq j \leq i-1$. Предположим, что все контакты из множества M_i неисправны и при этом замкнуты. В таком случае в схеме S_i^i существует цепь между полюсами, обладающая тождественно единичной проводимостью, значит, данная схема вне зависимости от состояний остальных содержащихся в ней контактов реализует тождественную единицу. При указанных неисправностях контактов каждая из схем S_j^i , где $i+1 \leq j \leq l$, может содержать замкнутые контакты из множества M_i . Удалим все такие контакты из схемы S_j^i , стягивая при этом две вершины каждого замкнутого контакта в одну. При этом схема S_j^i перейдет в некоторую двухполюсную контактную схему S_j^{i+1} , функционирующую в точно-

сти как схема S_j^i в случае, когда все контакты, содержащиеся в схеме S_j^{i+1} , исправны, так и в случае неисправности некоторых из этих контактов. На этом считаем i -й шаг процедуры завершённым и заменяем i на $(i+1)$.

В результате q шагов указанной процедуры строятся набор схем S_j^i , $i = 1, \dots, q+1$, $i \leq j \leq l$, и попарно непересекающиеся множества M_i , $1 \leq i \leq q$, такие, что $|M_i| = m_i$ и при замыкании контактов из множества $M' = \bigcup_{1 \leq i \leq q} M_i$

каждая из схем S_j^i , $i = 1, \dots, q+1$, $i \leq j \leq l$, функционирует в точности как схема S_j^1 , а каждая из схем S_i^1 , $1 \leq i \leq q$, реализует тождественную единицу.

Отсюда следует, что и каждая из схем S_i^1 , $1 \leq i \leq q$, реализует при рассматриваемых неисправностях контактов тождественную единицу. Общее число неисправных контактов $s = |M'|$ в силу (5), (6) равно

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{1 \leq i \leq q} M_i \right| &= \sum_{1 \leq i \leq q} |M_i| = \sum_{1 \leq i \leq q} m_i \leq \sum_{1 \leq i \leq r} (N - k) \leq r(N - k) \leq \\ &\leq \frac{k-1}{N-k} (N - k) = k - 1, \end{aligned} \quad (7)$$

т.е.

$$s \leq k - 1. \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $q < r$. Тогда, согласно описанию рассмотренной выше процедуры, ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \dots, S_l^{q+1}$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N - k$, при этом ни в одной из этих схем не содержится ни одного контакта, принадлежащего множеству M' . Число контактов во множестве $M \setminus M'$ равно $N - s \geq k + 1 - s$, так как $k < N$ по условию теоремы; при этом $k + 1 - s \geq 2$ в силу (8). Следовательно, во множестве $M \setminus M'$ можно выбрать подмножество M'' из $k + 1 - s$ контактов, а в нем – два различных контакта K и K' . Рассмотрим следующие две неисправности H_1 и H_2 системы контактов: H_1 заключается в замыкании всех контактов из множества M' и обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K\}$, H_2 заключается в замыкании всех контактов из множества M' и обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K'\}$. Очевидно, что множества неисправных контактов при данных двух неисправностях различны; кроме того, как при H_1 , так и при H_2 неисправны не более $|M'| + |M'' - 1| = s + (k - s) = k$ контактов. Поэтому достаточно доказать, что наборы функций, реализуемых схемами $S_1^1, \dots, S_l^1$ при неисправностях H_1 и H_2 , совпадают. Докажем, что оба этих набора равны $(\underbrace{1, \dots, 1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-q})$. Действительно, так как все контакты во множе-

стве $M' = \bigcup_{1 \leq i \leq q} M_i$ замкнуты и при H_1 , и при H_2 , то в силу построения мно-

жеств M_i каждая из схем $S_i^1, 1 \leq i \leq q$, реализует тождественную единицу. Далее, ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \dots, S_l^{q+1}$ не существует цепи, соединяющей ее полюса, длины не более $N - k$, и это свойство, очевидно, сохранится как при обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K\}$ (при неисправности H_1), так и при обрыве всех контактов из множества $M'' \setminus \{K'\}$ (при неисправности H_2). Однако в каждом из этих случаев исправными останутся только $N - |M'| - |M'' - 1| = N - k$ контактов, откуда следует, что ни в одной из схем $S_{q+1}^{q+1}, \dots, S_l^{q+1}$ не будет существовать и цепи между ее полюсами длины более $N - k$, т.е. вообще никакой цепи между полюсами. Это означает, что каждая из схем $S_{q+1}^{q+1}, \dots, S_l^{q+1}$ при каждой из неисправностей H_1 и H_2 будет реализовывать тождественный нуль, что и требовалось доказать.

2. Пусть $q = r$. Из (7) следует, что $s \leq r(N - k)$. Дополним множество M' до множества M''' произвольными $r(N - k) - s$ контактами из множества $M \setminus M'$. Тогда $|M'''| = r(N - k)$. Будем считать, что все контакты из множества M''' неисправны и при этом замкнуты. Тогда, в частности, все контакты из множества M' замкнуты, а это означает, что схемы $S_1^1, \dots, S_r^1$ реализуют тождественную единицу. Так как $S_1^1, \dots, S_l^1$ – проверяющий тест, то по набору функций, реализуемых схемами S_j^1 , где $r + 1 \leq j \leq l$, можно определить исправность или неисправность оставшихся $N - |M'''| = N - r(N - k)$ контактов, среди которых может быть не более $k - r(N - k)$ неисправных. Отсюда $L_c(N - r(N - k), k - r(N - k)) \leq l - r$, но это противоречит равенству (4). Случай 2 разобран.

Для доказательства неравенства

$$L_d(N, k) \leq r + L_d(N - r(N - k), k - r(N - k))$$

повторяем дословно приведенное рассуждение с заменой понятия «проверяющий тест» на понятие «диагностический тест».

Теорема 2 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Н. П. Редькину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Гаврилов, М. А. Теория релейно-контактных схем / М. А. Гаврилов. – М. : Л., 1950. – 304 с.
2. Колдуэлл, С. Логический синтез релейных устройств / С. Колдуэлл. – М., 1962. – 440 с.
3. Лупанов, О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем / О. Б. Лупанов. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 138 с.

4. **Попков, К. А.** Диагностика состояний контактов / К. А. Попков // Дискретная математика. – 2013. – Т. 25, № 4. – С. 30–40.

References

1. Gavrilov M. A. *Teoriya releyno-kontaktnykh skhem* [Theory of relay-contact networks]. Moscow; Leningrad 1950, 304 p.
2. Kolduell S. *Logicheskiy sintez releynykh ustroystv* [Logic synthesis of relay devices]. Moscow 1962, 440 p.
3. Lupanov O. B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic estimation of control system complexity]. Moscow: Izd-vo MGU, 1984, 138 p.
4. Popkov K. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2013, vol. 25, no. 4, pp. 30–40.

Попков Кирилл Андреевич

аспирант, Московский
государственный университет
имени М. В. Ломоносова (Россия,
г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Popkov Kirill Andreevich

Postgraduate student, Lomonosov
Moscow State University (1 Leninskie
Gory street, Moscow, Russia)

УДК 519.718.7.

Попков, К. А.

Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для контактов / К. А. Попков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 108–121.